

BLOQUE I. ANÁLISIS.

PROBLEMAS SELECTIVIDAD (PAU) CANTABRIA 1996-2008

I.E.S. LA MARINA. CURSO 2008/2009. MATEMÁTICAS II.

ELEMENTOS DE UNA FUNCIÓN- GRÁFICAS

1.- Dada la función $f(x) = x^2 + \frac{a}{x}$ donde **a** es un número real, A) Demostrar que cualquiera que sea el valor de **a**, **f** tiene un mínimo, y no tiene máximo. B) Demostrar que si $a \neq 0$, **f** tiene un punto de inflexión y una asíntota vertical. ¿qué ocurre si $a=0$? C) Representar gráficamente el caso $a=1$. (J-96)

2.- Dada la función $f(x) = \frac{x^2 + x}{x - 1}$, A) Determina el dominio, las asíntotas y la simetría. B) Determinar los puntos de corte de la gráfica de **f** con los ejes y con las asíntotas. C) Determinar los máximos y los mínimos. D) Determinar la gráfica de **f** y las asíntotas. (S-96)

3.- Dada la función $f(x) = \frac{x^2}{2} L\left(\frac{x}{a}\right)$, donde $a > 0$ es un número fijo, se pide estudiar:
A) Dominio y asíntotas. B) Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos.
C) Concavidad y convexidad. D) Representar gráficamente la función. (J-97)

4.- Dada la función $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 3a^2}$, donde $a > 0$ es un número fijo, se pide estudiar:
A) Dominio y asíntotas. B) Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos.
C) Concavidad y convexidad. D) Representar gráficamente la función. (S-97)

5.- Dada la función $f(x) = e^x(x^3 - 4x^2 + 7x - 6)$, se pide estudiar:
A) Dominio y asíntotas. B) Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos.
C) Concavidad y convexidad. D) Dibujar la gráfica de **f**(**x**) y sus asíntotas. (J-98)

6.- Dada la función $f(x) = \frac{x - a}{(x - b)^2}$, donde **a** y **b** son dos número positivos fijos, se pide determinar los valores de **a** y **b** para que **f** tenga un extremo en $(0, -1/4)$. Estudiar si ese extremo es máximo o mínimo. (S-98)

7.- Dada la función $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$, se pide estudiar: A) Dominio, asíntotas y posición

de la curva respecto de estas. B) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Extremos relativos. C) Curvatura D) Gráfica a partir de los resultados anteriores. (J-99)

8.- Sea $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 4$. Se pide: A) Determinar los máximos y mínimos relativos de $f(x)$ y los intervalos de crecimiento y decrecimiento. B) Calcular los valores máximo y mínimo que toma la función $f(x)$ en el intervalo $[0, 3]$. (S-99)

9.- Sea $f(x) = nx - x^n$ siendo n cualquier número entero distinto de 0 y de 1.

a) Comprobar que, para cualquier valor de n ($\neq 0, 1$), $f(x)$ tiene un extremo relativo en $x = 1$. Averiguar si depende o no del valor de n , el que el extremo sea máximo o mínimo.

b) Suponiendo ahora que $n > 1$, determinar, según los valores de n , los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

c) Utilizar ésto para probar que $nx - x^n \leq n - 1$ para todo $x \geq 0$ y para todo $n > 1$. (J-00)

10.- Si $f(x) = e^{-x}(x^2 + 6x + 9)$, se pide: A) Dominio, cortes con los ejes y asíntotas.

B) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos. C) A partir de los resultados anteriores, obtener el menor valor de c para que se cumpla $e^{-x}(x^2 + 6x + 9) < c$, para todo $x > 2$. (J-01)

11.- Sea $f(x) = \frac{1-x}{1-|x|}$. Se pide: A) Dominio y cortes con los ejes. B) Asíntotas.

C) Intervalos de crecimiento y decrecimiento y gráfica de la función. (S-01)

12.- Sea $f(x) = L\left(\frac{x^2 - 2}{2x - 1}\right)$. Se pide: A) Dominio, cortes con los ejes y asíntotas.

B) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. C) A partir de los datos obtenidos, representar gráficamente la función. (J-02)

13- Considera la función $f(x) = \frac{5x+8}{x^2+x+1}$, calcula : A) Su dominio, cortes con los ejes

e intervalos de crecimiento y decrecimiento. B) Sus asíntotas. C) A partir de los datos anteriores, representa la función. (J-03)

14.- Considera la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$. Calcula : A) Su dominio, cortes con los ejes e intervalos de crecimiento y decrecimiento. B) Sus asíntotas. C) A partir de los datos anteriores, representa la función. (S-03)

15.- Considera la función $f(x) = x^3 + ax^2 + 5$.

a) Calcula el valor de a para que f tenga un extremo relativo cuando $x=2$.

b) Para ese valor de a , calcula los extremos relativos, el crecimiento y los P.I. Haz la gráfica de f .

c) ¿Hay algún valor de a para el que f sea creciente en todo \mathbb{R} ? Explícalo. (J-04)

16.- Considera la función $f(x)=\frac{1+x}{1-|x|}$. Se pide: A) Dominio y cortes con los ejes. B) Asíntotas. C) Crecimiento. Dibuja su gráfica. (S-04)

17.- Considera la función $f(x)=xg(x)$. Sabiendo que g es continua, derivable y tiene un máximo en $x=1$ y que $f(1)g(1)=4$, ¿tiene f un máximo en $x=1$? Justifica tu respuesta.
 b) Si además sabemos que $g(x)=ax^2+bx+c$, calcula valores a, b y c para que f tenga un mínimo en $x=0$. c) Para dichos valores de a, b y c realiza un esquema gráfico de la función $y=f(x)$ (J-05)

18.- Considera la función $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x^2+1} & \text{si } x > 0 \\ ax+b & \text{si } 0 \leq x \leq 3, \text{ con } a \text{ y } b \in \mathbb{R} \\ x-5 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

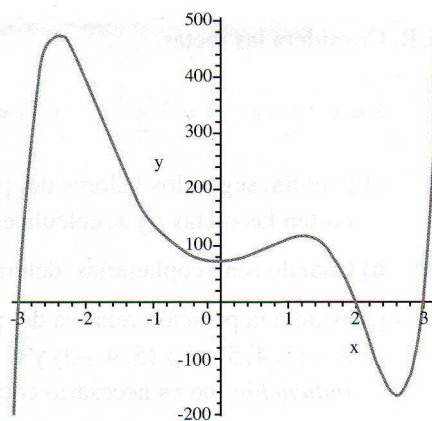
- a) Calcula los valores de a y b para que sea continua.
- b) Para esos valores de a y b , calcula la derivada de f donde exista. Justifica los casos en los que f no es derivable.
- c) En el intervalo $(-\infty, 0)$ estudia la existencia de los puntos de corte con los ejes, si la función crece o decrece, la existencia de puntos de inflexión y si tiene asíntotas. Dibuja la gráfica de la función en todo \mathbb{R} . (J-06)

19.- Se considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = x^3 + 3x^2 + ax + b$.

- a) Calcula los valores de las constantes a y b para que f tenga como recta tangente en su punto de inflexión a la recta $y = 1$.
- b) Para esos valores de a y b dibuja la gráfica de la función, analizando previamente los intervalos de crecimiento, los puntos de corte con los ejes. La existencia de asíntotas y la curvatura. (S - 06)

20.- El dibujo adjunto corresponde a la gráfica de una función f .

- a) Haz la representación gráfica de la función $-f$ en $[-3, 3]$.
- b) Con los datos que tienes y sabiendo que f es derivable dos veces en todo \mathbb{R} , haz un dibujo que pueda corresponder a la función derivada f' en $[-3, 3]$. Explica cómo construyes ese dibujo.
- c) Si f es estrictamente creciente en $(-\infty, -3)$ y en $(3, +\infty)$, ¿cuántos extremos máximos y mínimos tiene f' y ¿cuántos tiene $-f'$? Para responder a cada pregunta elige una y sólo una de las tres opciones siguientes y justifica tu elección:
 - 1) Tiene al menos cuatro puntos extremos.
 - 2) Tiene exactamente cuatro puntos extremos.
 - 3) Tiene exactamente seis puntos extremos.



(S- 2006)

21.- a) Calcula la expresión analítica de una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que verifique las dos condiciones siguientes:

1. $f'(x) = 2x^3 - 6x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
 2. El valor mínimo de $\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$ es -12.
- a) Calcula los puntos de inflexión de la función f y en cada uno de ellos determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f .
- b) Justifica en cuántos puntos corta la gráfica de f a los ejes de coordenadas.
- Indicación: no es necesario calcular los puntos de corte.* (S-07)

22.- Considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{|x|}{1+x^2}$.

- a) Estudia su derivabilidad (calcula la derivada donde exista y justifica la no existencia de derivada donde proceda).
- b) Comprueba que tiene como eje de simetría el eje de ordenadas (función simétrica respecto a OY).
- d) Determina el punto de corte con los ejes, los intervalos de crecimiento, los puntos de inflexión y las asíntotas de f . Haz su representación gráfica. (J-08)

23.- Razona si son derivables en el punto $x = 0$ cada una de las dos funciones siguientes:

- a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
- b) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Justifica si es verdadera o falsa cada una de las afirmaciones siguientes. Para cada afirmación que consideres falsa pon un ejemplo ilustrativo.

- a) Si $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función tal que: $\lim_{x \rightarrow a^-} h'(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} h'(x)$, entonces h es derivable en $x = a$.
- b) Si una función real es continua en un punto, entonces es derivable en ese punto. (J-08)

24.- Razona si son derivables en el cero cada una de las siguientes funciones de variable real:

- a) a) $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \\ x+3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$
- b) b) $g(x) = \sqrt{x^3 + x^2}$

Justifica si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. En el caso de que consideres que la afirmación es falsa, pon un ejemplo ilustrativo.

- c) Para cualquier función polinómica de segundo grado existe un punto tal que la recta tangente a la función en ese punto es una recta paralela al eje de abscisas.
- d) Si $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ verifican que $h'(x) = g'(x)$, entonces $h(x) = g(x)$. (S-08)

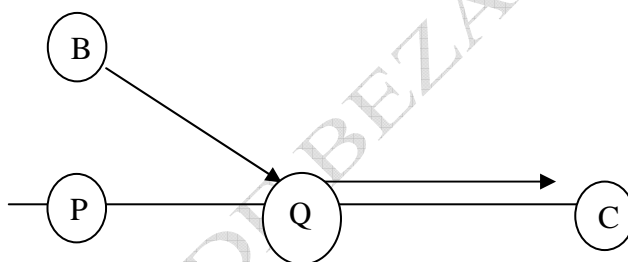
OPTIMIZACIÓN

1.- El coste de producir x unidades de un producto está dado por la función $f(x) = 10x^2 + 200x + 6000$. Si p es el precio por unidad, el número de unidades vendidas a ese precio es $x = \frac{1000 - p}{10}$. Expresar la ganancia obtenida en función de x ,

y determinar: a) Para qué valores de x la ganancia es positiva. b) Para qué valores de x la ganancia es máxima. (J-96)

2.- Un barco **B** está anclado a 9 km del punto más cercano **P** de una costa que forma una línea recta. A 15 km del punto **P**, en la costa, hay un campamento **C**.

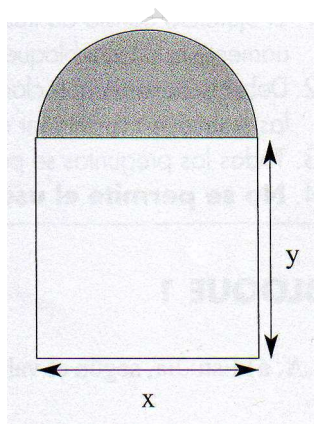
Un mensajero debe ir desde el barco al campamento; teniendo en cuenta que puede remar a una velocidad de 4 km/h, y andar a una velocidad de 5 km/h, hallar el punto **Q** de la costa, entre **P** y **C**, en el que debe tomar tierra, para llegar al campamento lo antes posible. (S-97)



3.- Expresar el número 60 como suma de tres *enteros positivos* de forma que el segundo sea doble del primero y su producto sea máximo. Determinar el valor de dicho producto. (J-02)

4.- Se consideran todos los pares de números reales positivos x , y tales que $xy = 2002$. se pide: A) determinar el par x , y cuya suma $x + y$ es mínima y calcular el valor de dicha suma. B) Probar que entre todos los pares existentes, puede elegirse x , y de forma que $x + y$ sea tan grande como se quiera. (S-02)

5.- Calcula las dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito en una circunferencia de 2 cm. de radio. (S-03)



6.- Una ventana tiene forma de un semicírculo colocado sobre un rectángulo de “ x ” metros de ancho por “ y ” metros de alto. El rectángulo es de cristal transparente, pero el semicírculo es de cristal tintado. El cristal tintado transmite la mitad de luz por unidad de área que el cristal transparente. Así, la función que nos da la cantidad de luz que pasa por la ventana es

$$f(x,y) = x \cdot y + \frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2$$

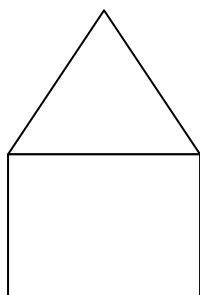
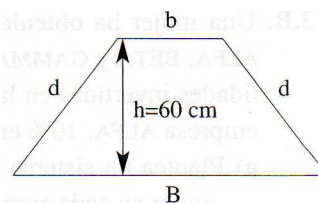
Sabiendo que el perímetro total de la ventana ha de ser de 2 metros, calcula las dimensiones “ x ” e “ y ” de la ventana que proporcionan el máximo posible de luz.

(S-04)

7.- Considera una caja de cartón de base rectangular y sin tapa superior. La longitud de unos de los lados del rectángulo de la base es 7 veces la del otro. Calcula las dimensiones que ha de

tener esta caja para que su volumen sea de 49 cm^3 y su fabricación sea lo más económica posible. Si el m^2 de cartón cuesta 2,5 euros ¿cuánto cuesta cada caja? (S-05)

8.- Se desea diseñar una tabla con forma de trapecio isósceles que sea de área máxima, que tenga una altura de 60 cm. y que la longitud del perímetro menos la longitud de la base mayor mida 280 cm. Determinar las longitudes de todos los lados del trapecio. (J-06)



9.- A una ventana rectangular se le abre un triángulo equilátero sobre el lado superior. Si el perímetro total de la figura así formada es de 11m, determinar las dimensiones para que el área sea máxima. (S - 97)

10.- Queremos hacer un envase con tapa y forma de prisma regular con base cuadrada y cuya capacidad sea 10.000 cm^3 . Sabiendo que cada cm^2 del material de la base sale un 50% más caro que cada cm^2 del material empleado en el resto del prisma, halla las dimensiones del envase para que su precio sea el menor posible. (J- 2007)

11.- Un hilo de 34 metros se divide en dos trozos para hacer un cuadrado y un rectángulo. Sabiendo que la base del rectángulo mide el doble que su altura y que se usa todo el hilo en las figuras geométricas indicadas, hallar las longitudes de los dos trozos de hilo para que la suma de las áreas del cuadrado y del rectángulo sea mínima. (S- 2007)

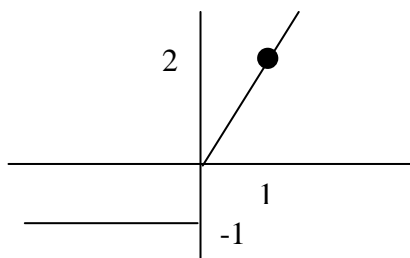
CONTINUIDAD. DERIVABILIDAD. INTEGRALES.

1.- Determinar el área encerrada entre las gráficas de las funciones $y = 6x - x^2$ e $y = x^2 - 2x$. Dibujar el recinto. (S-96)

2.- Calcular: $\int xL(1 + x^2)dx$ (J-97)

3.- Obtener una función $f(x)$ que verifique: $f'(x) = (x-1).e^x$ y $f(x)$ tiene un extremo en el eje OX. Determinar si ese extremo es máximo o mínimo (J-98)

4.- La gráfica de la derivada $f'(x)$ de una función continua es la que se indica en la fig 1. Se pide, razonando las respuestas:



- Escribir la ecuación de $f'(x)$.
- Dibujar la gráfica de $f(x)$, si $f(0) = 1$.
- Dibujar la gráfica de $f''(x)$. (S-98)

5.- Determinar la función $f(x)$ sabiendo que $f''(x) = x L(x)$, $f'(1) = 0$ y $f(e) = e/4$ (J-99)

6.- Si $f(x) = \sqrt{\frac{x}{2}}$ y $g(x) = |1 - x|$

- Dibujar los dos gráficas en un mismo plano y calcular sus puntos de intersección.
- Determinar el área del recinto encerrado entre ambas gráficas. (S-99)

7.- Se considera la función $f(x) = x\sqrt{5 - x^2}$. Se pide:

- Dominio y cortes con los ejes. Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- Calcular el área encerrada entre la gráfica de $f(x)$ y el eje de abscisas. (J-00)

8.- Para cualquier número real a , se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{si } -\infty < x \leq 0 \\ \text{sen}(ax) & \text{si } 0 < x < \pi \\ (x - \pi)^2 + 1 & \text{si } \pi \leq x < \infty \end{cases}$$

- Determinar los valores de a para los cuales $f(x)$ es continua en todo \mathbb{R} . Estudiar la derivabilidad de $f(x)$ para cada uno de esos valores.
- Determinar un valor de b para el cual la función $\text{sen}(bx)$ tenga exactamente 40 mínimos en el intervalo $(0, \pi)$. (S-00)

9.- Sea $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x - 2}$. Se pide: A) Dominio y cortes con los ejes. B) Estudio de las

asíntotas verticales, horizontales y oblicuas. C) Hacer una gráfica representando los datos obtenidos antes. Si es posible, completar la definición de $f(x)$ en los puntos en que sea necesario para obtener una nueva función que sea continua en todo \mathbb{R} o en todo \mathbb{R} salvo un número finito de puntos. (S-00)

10.- Se considera la función $f(x) = \left| \text{sen}(4x) - \frac{1}{2} \right|$. Se pide:

- Puntos de corte con los ejes. ¿Cuáles son los valores máximo y mínimo que toma la función $f(x)$?
- Estudio de la continuidad y derivabilidad de $f(x)$ en el intervalo $(0, \pi)$. (J-01)

11.- Determinar los valores de a y b para los cuales la función $f(x) = aL(x) + bx^2 + x$ tiene extremos relativos en los puntos $x=1$ y $x=2$. Averiguar si estos extremos son máximos o mínimos. Con los valores obtenidos de a y b , calcular razonadamente el área del recinto limitado por la función, el eje OX y las rectas $x=1$ y $x=2$. (S-01)

12.- Dada la función $f(x) = x - \sqrt{\frac{2}{x+1}}$, se pide:

- Dominio, cortes con los ejes e intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- Área del recinto limitado por la función, el eje OX y las rectas $x = 0$, $x = 3$. (S-02)

- 13.- A) Calcula la expresión analítica de la función f que cumple las siguientes condiciones: i) Es un polinomio de grado 3. ii) Corta al eje OX en tres puntos que tienen por abscisas, respectivamente, $x=2$, $x=4$, $x=6$. iii) Su valor en $x=0$ es $f(0) = -48$
 B) Haz un esquema gráfico de la función f obtenida en el apartado anterior.
 C) Calcula el área del recinto limitado por: La gráfica de f , el eje OX, la recta de ecuación $x=2$ y la recta de ecuación $x=4$. (J-03)

14.- Considera la función $f(x) = x^2 + |x|$.

- a) Calcula los puntos de corte de la gráfica de f con los ejes.
 b) Calcula los extremos relativos y el crecimiento de f .
 c) Dibuja su gráfica
 d) Calcula $\int_{-1}^2 f(x) dx$ (J-04)

- 14.- a) Dibuja la gráfica de $f(x) = \frac{1}{4-x^2}$, calculando previamente el dominio, los extremos y las asíntotas. b) Halla el área delimitada por $g(x)=x+2$ y $h(x)=4-x^2$
 c) Da otra expresión $p(x)$ tal que el área comprendida entre la gráfica de $y=p(x)$ y el eje X, entre los valores $x=-1$, $x=1$, coincida con el área que has calculado en el apartado anterior. Justifica tu respuesta. (J-05)

15.- a) Sea la función f definida por $f(x) = \begin{cases} 2ax^2 - x + 4 & \text{si } x \leq 1 \\ ax + 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$. Calcula el valor de a que hace que f sea continua en todo \mathbb{R} .

- b) Para el valor de a calculado haz un esquema gráfico de la función f . Calcula y señala en el gráfico los extremos de f y los puntos de corte con los ejes.
 c) Para el valor de a calculado calcula el área de la región delimitada por f en el primer cuadrante.
 d) Para el valor de a calculado ¿se cumple que la recta $y = ax+2$ es tangente a la función $g(x) = 2ax^2 - x + 4$ en el punto $x = 1$? Justifica la respuesta. (S-05)

16.- Considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \text{sen}(x) & \text{si } x \leq 0 \\ bx + x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases} \text{ con } b \in \mathbb{R}$$

- c) Calcula el valor de b para que f sea derivable en $x = 0$.
 d) Para $b = -2$ y el intervalo $[-2\pi, 3]$, determina los puntos de corte con los ejes, los extremos relativos (máximos y mínimos), la curvatura y la gráfica de la función f .
 e) Calcula el área comprendida entre la curva $y = \text{sen } x$ y la recta $y = 0$ en el intervalo $[-2\pi, 0]$. (J-07)

17.- Considera las funciones $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por: $f(x) = x+3$ y $g(x) = x^3 + 3x^2$

- a) Dibuja la gráfica de la función f .
 b) Dibuja la gráfica de la función g en el intervalo $[-3, 1]$, determinando previamente sus puntos de corte con los ejes y con la función f , sus extremos relativos (máximos y mínimos) y su curvatura.
 c) Calcula el área de los recintos limitados entre las gráficas de las dos funciones en el intervalo $[-3, 1]$. (S-08)